

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego
(7 stycznia 2012 r.)



1. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a , b , których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a + b$ równa się 175.

2. W pewnym turnieju uczestniczyło 6 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą inną dokładnie jeden mecz. Za zwycięstwo w meczu drużyna otrzymywała 3 punkty, za porażkę 0 punktów, a za remis 1 punkt. Po turnieju okazało się, że suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi 41. Wykaż, że istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała.

3. Czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a , b , c , którego pole jest równe $\frac{1}{4}(ab + bc)$? Odpowiedź uzasadnij.

4. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieujemnych i nie większych od 1, dla których spełniona jest równość

$$a + b + c = ab + bc + ca.$$

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wykaż, że punkt O jest jednakowo odległy od prostych AD i CD .

