

**KONKURS NA OPRACOWANIE PROGRAMÓW NAUCZANIA  
KSZTAŁCENIA OGÓLNEGO**

IDENTYFIKATOR ZESPOŁU AUTORSKIEGO

<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>8</b>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

## *Matematyka realistyczna*

Program nauczania matematyki dla drugiego etapu edukacyjnego  
(klasy IV–VI szkoły podstawowej)  
zgodny z podstawą programową opublikowaną 14 maja 2010 r.

### Spis treści

Wstęp .....	1
Założenia .....	2
Cele edukacyjne .....	3
Materiał nauczania .....	5
Realizacja treści podstawy programowej .....	9
Ocenianie kompetencji uczniów .....	13

## Wstęp

Program *Matematyka realistyczna* jest pierwszą próbą adaptacji teorii *Realistic Mathematics Education* do polskiego systemu szkolnego i najnowszej podstawy programowej. Jego kolejne wersje będą powstawać w trakcie tworzenia podręczników uczniowskich, przewodnika dydaktycznego dla nauczyciela, wreszcie po pierwszym cyklu jego realizacji. Tej ostatniej towarzyszyć powinien systematyczny i metodyczny monitoring.

Koncepcja programu i związanych z nim niezbędnych metod, środków dydaktycznych i form organizacji pracy nauczyciela z uczniami bardzo odbiegają od szkolnej tradycji. Najwyraźniejsze zmiany spowodowane jego realizacją będą więc oczekiwane w tych kompetencjach uczniów, których państwowy sprawdzian nie bada; można je będzie poznać za pomocą specjalnie konstruowanych testów, jakie proponujemy w ostatnim rozdziale, i ustnych rozmów z uczniami.

## Założenia

1. Podstawę teoretyczną programu stanowi koncepcja Realistycznego Nauczania Matematyki (*Realistic Mathematics Education*)<sup>1</sup>. Można ją krótko scharakteryzować następującymi cechami:

- posługiwanie się kontekstem,
- posługiwanie się modelami,
- posługiwanie się własnymi produktami i konstrukcjami uczniów,
- interaktywność,
- przeplatanie się linii tematycznych.

Program jest przy tym zgodny z zaleceniami dydaktycznymi podstawy programowej, a w szczególności zaleceniem:

- rozwijania czynnej i twórczej postawy uczniów w procesie zdobywania wiedzy matematycznej;
- nacisku na rachunek pamięciowy i posługiwanie się kalkulatorem przy rezygnacji z biegłości uczniów w technice rachunkowej;
- odejścia od wymagania precyzyjnych sformułowań i zapisów matematycznych na rzecz swobodnej i naturalnej wypowiedzi uczniów.

2. Materiał nauczania został zorganizowany w jednostki dydaktyczne, uszeregowane w przemyślany sposób. W jednostce splatają się często dwie lub trzy linie tematyczne; nazwa jednostki sygnalizuje tylko jedną z nich. Kolejno następujące po sobie jednostki często też wiąże jeden wspólny temat. Taka struktura programu realizuje zasadę przeplatania się w nauczaniu linii tematycznych.

3. Liczby dziesiętne (rozumiane jako liczby zapisywane w dziesiętkowym systemie pozycyjnym) i działania na nich zostały w programie umieszczone przed ułamekami zwykłymi. Algorytmy rachunkowe na tych liczbach są bowiem rozszerzeniem algorytmów dla liczb naturalnych, a więc są łatwiejsze do zrozumienia i zapamiętania przez uczniów od algorytmów działań na ułamkach.

4. Związane z tym jest wprowadzenie systematycznej nauki racjonalnego posługiwania się kalkulatorem elektronicznym przez uczniów. Jest to konieczność wynikająca z następujących punktów podstawy programowej:

---

<sup>1</sup> Zob. np. Marja van den Heuvel-Panhuizen, Monica Wijers, *Mathematics standards and curricula in the Netherlands*, „Zentralblatt für Didaktik der Mathematik” 2005, Vol. 37 (4); Adrian Treffers, *Three Dimensions*, D. Reidel, Dordrecht 1987.

2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:

3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową pisemnie, w pamięci (w najprostszych przykładach) i **za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach)**;

10) zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w pkt. 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem trzech kropek po ostatniej cyfrze), dzieląc licznik przez mianownik w pamięci, pisemnie **lub za pomocą kalkulatora**;

5. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:

8) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych poprawnych strategii **lub z pomocą kalkulatora**.

Kalkulator, nawet najprostszy, czterodziałaniowy, może być jednocześnie narzędziem poznawania liczb, działań i ich własności. Z nowymi liczbami – ułamkami dziesiętnymi, liczbami ujemnymi – uczniowie zetkną się i zaczną pojmować ich sens w naturalny sposób, operując kalkulatorem. Także istotność kolejności wykonywania działań w obliczeniach ujawni się wyraziście, gdy obliczenia te będą wykonywane na kalkulatorze.

5. W programie zaproponowaliśmy budowanie praw rachunkowych i uproszczeń rachunku w oparciu o dwa modele mnożenia: 1) pole prostokąta jako model mnożenia dwóch liczb; 2) skalowanie jako model mnożenia liczby lub wielkości przez liczbę zwaną wtedy skalą. Ten drugi, sugerowany przez matematyka Keitha Devlina<sup>2</sup>, nie ma jeszcze pełnego opracowania dydaktycznego; powinno ono powstać wraz podręcznikiem dla uczniów. Model ten jest też naturalny przy wykonywaniu obliczeń na kalkulatorze. Oto kilka przykładów skalowania w kontekstach realnych i abstrakcyjnych.

Odległości na mapie są wynikiem skalowania odległości rzeczywistych skalą 1/100 000 lub 1:100 000 (zapisy równoważne).

Obniżka cen o 25% to ich skalowanie czynnikiem 0,75; podwyżka o 25% – skala 1,25.

Skalowanie jednego boku prostokąta zmienia pole w tej samej skali; skalowanie jednego czynnika iloczynu skaluje tak samo cały iloczyn (łączność). Skalowanie składników wspólną skalą tak samo skaluje sumę (rozdzielność). Skalowanie czynników odwrotnymi skalami nie zmienia iloczynu, np.  $5 \cdot 16 = 10 \cdot 8$  (zastosowano odwrotne skale 2 i  $\frac{1}{2}$ ). Jednakowe skalowanie dwu liczb nie zmienia ich ilorazu. Np.  $12,45:1,5=124,5:15$  (skala 10).

Ułamek jest wynikiem skalowania liczby naturalnej. Np.  $7/5$  to 7 w skali  $1/5$  czyli  $1/5 \cdot 7$ ;  $2/5 : 7/5 = 2 : 7$  (skala 5);  $2/5 + 7/5 = 1/5 \cdot (2+7)$  (2 w skali  $1/5$  plus 7 w skali  $1/5$  to  $2+7$  w skali  $1/5$ ).

6. Przymiotnik „realistyczna” wskazuje, że w rozwijaniu myślenia matematycznego szeroko wykorzystywane będą konteksty realistyczne dla uczniów, to jest przemawiające do ich wyobraźni, a niekoniecznie „praktyczne”. Znaczy też, że jednostki dydaktyczne, w których naucza się geometrii, będą zorganizowane do pracy uczniów z użyciem materiałów konkretnych i środków dydaktycznych

---

<sup>2</sup>Zob. [www.maa.org/devlin/devlin\\_06\\_08.html](http://www.maa.org/devlin/devlin_06_08.html), [www.maa.org/devlin/devlin\\_0708\\_08.html](http://www.maa.org/devlin/devlin_0708_08.html), [www.maa.org/devlin/devlin\\_09\\_08.html](http://www.maa.org/devlin/devlin_09_08.html).

przeznaczonych do manipulacji (realnej lub wirtualnej), takich jak geoplan, środowisko Cabri czy inne programy komputerowe.

7. Zakładamy, że podstawową formą organizacyjną lekcji jest interaktywna praca w grupach, w wyniku której uczniowie zdobywają nową wiedzę, poszerzają ją i pogłębiają. Z tego względu szczegółowy materiał nauczania został ujęty w aktywnościach. Są one tutaj jedynie zasygnalizowane; rozwinięcie powinno się znaleźć w podręczniku ucznia i poradniku nauczyciela.

## Cele edukacyjne

Głównym celem nauczania matematyki na każdym poziomie edukacyjnym jest rozwijanie w uczniach kompetencji matematycznych. Mogens Niss<sup>3</sup> wyróżnia ich osiem:

1. myślenie typu matematycznego,
2. formułowanie i rozwiązywanie problemów matematycznych,
3. modelowanie matematyczne,
4. rozumowanie matematyczne,
5. reprezentowanie obiektów matematycznych,
6. posługiwanie się matematyczną symboliką i formalizmami,
7. komunikowanie się w matematyce i o matematyce,
8. używanie środków pomocniczych i narzędzi.

Program *Matematyka realistyczna* rozwija wszystkie wymienione kompetencje, kładąc szczególny nacisk na kompetencje 2, 3 i 7.

**Rozwiązywanie problemów** jest najczęściej spotykanym typem aktywności uczniów. Ten program, przez wiązanie z sobą różnych światów pojęciowych, stwarza uczniom szerokie pole do zadawania pytań i formułowania problemów, a także do szukania różnych dróg rozwiązania, porównywania ich i oceniania.

**Modelowanie matematyczne** jako aktywność uczniów przejawia się w trzech sytuacjach:

– gdy uczeń dobiera lub tworzy matematyczną strukturę (figura geometryczna, równanie) jako model sytuacji realistycznej (także abstrakcyjnej), w celu rozwiązania dotyczącego jej problemu;

---

<sup>3</sup> Profesor dydaktyki matematyki Uniwersytetu Roskilde (Dania), członek grupy ekspertów w projekcie PISA.

– gdy dla sytuacji abstrakcyjnej (np. działania arytmetycznego) uczeń znajduje obiekt realistyczny (konkretny lub mniej abstrakcyjny, jak figura geometryczna) jako jej model, pomagający w oswojeniu tej sytuacji i pamiętaniu jej własności;

– gdy rozwiązując nowe problemy, uczeń odwołuje się do problemu wcześniej rozwiązanego jako ich modelu paradygmatycznego (np. zadania na porównywanie różnicowe i ilorazowe).

Program *Matematyka realistyczna* stwarza okazje do matematycznego modelowania niemal na każdej lekcji.

**Komunikowanie się** matematyczne jest celem edukacyjnym. Jednocześnie jest ono na lekcjach niezbędnym warunkiem tworzenia się i rozwijania pojęć i procedur abstrakcyjnych, a więc rozumnego rozwiązywania problemów, w tym stosowania matematyki w sytuacjach realnych. Struktura programu *Matematyka realistyczna* umożliwia stopniowe kształtowanie pojęć w interakcji, przez negocjowanie ich rozumienia w dyskusjach, w czasie pracy w grupach i pod kierunkiem nauczyciela. Przekazywanie sobie i omawianie zapisów i ich uproszczeń będzie prowadziło do rozumienia procedur formalnych i algorytmów, a nie tylko ich mechanicznego wykonywania. Dyskusja nad różnymi sposobami rozwiązania zadania będzie kształtować otwarte podejście do problemów i rozszerzy repertuar metod.

## Materiał nauczania

**Linie tematyczne: L Liczby i działania, A Myślenie algebraiczne, F Figury geometryczne, M Mierzenie i miary, J Język matematyki, Alg Algorytmy**

Jednostka dydaktyczna	Liczba lekcji <sup>4</sup>	Aktywności	Linie tematyczne	Podstawa programowa
-----------------------	----------------------------	------------	------------------	---------------------

### KLASA IV

1. Liczby naturalne I	32	<p>Liczenie grupami, np. po 2, 3, 7, 12, zapisywanie liczb słowami i cyframi. Porównywanie liczb. Wielkie liczby (potęgi 2 i 10).</p> <p>Liczby naturalne na osi liczbowej: kojarzenie miejsca i liczby, kalibrowanie osi. Zaokrąglanie.</p> <p>Tarcza zegara (różne kształty), kalendarz. Długość odcinka osi, „przesuwanie” odcinka (np. <math>8-2=10-4</math>).</p> <p>Odległość w m, km. Upływ czasu w godzinach, minutach, dniach, tygodniach, miesiącach, latach.</p> <p>Rzymski zapis liczb.</p>	L, J, F, M, Alg	1. 1) 2) 3) 4) 5) 12. 3) 4) 6)
2. Figury geometryczne I	12	<p>Tort, placki (różne kształty): średnica, promień, cięciwa; przekątna; środek; kąt, ramiona, porównywanie; kąty wierzchołkowe; ułamek <math>1/n</math>.</p>	F, J	8. 1) 5) 9. 4) 5) 6) 4. 1)
3. Dodawanie i odejmowanie liczb naturalnych	23	<p>Odejmowanie jako ujmowanie i jako dopełnianie (różne konteksty).</p> <p>Dodawanie i odejmowanie w pamięci. techniki (także „przesuwanie” składników, np. <math>38-24=40-26</math>). Kalkulator.</p> <p>Dodawanie i odejmowanie z pomocą zapisu. Upraszczanie zapisu.</p> <p>Obliczenia zegarowe i kalendarzowe.</p>	L, J, Alg	2. 1) 2) 12. 3) 4)

4. Ułamki dziesiętne 21	Mierzenie linijką, zapis długości L, M, J, Alg z przecinkiem (5,3 cm) i bez (5 cm 3 mm). Rysowanie odcinka danej długości.	7. 4) 4. 7) 11)
	Ułamki dziesiętne na osi liczbowej: kojarzenie punktu i liczby, skalowanie osi. Znaczenie drugiej i dalszych cyfr po przecinku. Zaokrąglanie.	5. 2)
	Skale 10%, 25%, 50%, 100% i ich użycie.	
	Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych w pamięci i z zapisem. Upraszczenie zapisu.	

**Linie tematyczne: L Liczby i działania, A Myślenie algebraiczne, F Figury geometryczne, M Mierzenie i miary, J Język matematyki, Alg Algorytmy**

5.	Figury geometryczne II	15	Trójkąty i czworokąty: klasyfikowanie, opis własności.  Prostokąt, jego pole i obwód.  Prostokąty o równych polach/obwodach.  Znajdowanie pól wielokątów na kracie. Tworzenie wielokątów o zadanym polu. Obliczanie obwodu wielokąta.	F, M	11. 1) 2)  8. 4)  9. 1)
6.	Równania I	16	Równoważne wypowiedzi i zapisy związków typu „ $x$ jest o $a$ większe $b$ ”, w tym równania.  Wymyślanie kontekstów dla równań typu $x+a=b$ itp. Zadawanie pytań i szukanie odpowiedzi.	A, J	6. 2)  14. 1) 3)
7.	Proste prostopadłe i równoległe	7	Zginanie papieru, opis relacji między krawędziami, tworzenie i używanie terminów geometrycznych.	F, J	7. 2)
<b>KLASA V</b>					
8.	Równania II	12	Równoważne wypowiedzi i zapisy związków typu „ $x$ jest $a$ razy większe $b$ ”, w tym równania.  Wymyślanie kontekstów dla równań typu $a \cdot x=b$ itp. Zadawanie pytań i szukanie odpowiedzi.	A, F, J	6. 2)  14. 1) 3)
9.	Wielościany	13	Klasyfikowanie i opisywanie modeli wielościanów. Prostopadłościany w otoczeniu.  Rozpłaszczanie modelu prostopadłościanu i ostrosłupa, rozpoznawanie i rysowanie siatek.	F, J	10. 1) 2) 3) 4)
10.	Pole prostokąta	12	„Ile papieru na oklejenie pudełka?": pole prostokąta, jednostka, $\text{cm}^2$ (długości boków całkowite). Proporcjonalne wydłużanie i skracanie boków („skalowanie”) a pole.	F, M	11. 2)



Różne techniki mnożenia liczb naturalnych.

11. Wyrażenie liczbowe, obliczanie wartości wyrażenia	10	Zapisywanie i obliczanie pola powierzchni siatki prostopadłościanu: różne wyrażenia. Mnożenie w pamięci, także przez „skalowanie” czynników (np. $5 \cdot 14 = 10 \cdot 14 : 2$ lub $5 \cdot 14 = 10 \cdot 7$ ). Kolejność działań. Gry i zagadki związane z wyrażeniami.	A, J	6. 2) 2. 5) 11) 5. 7) 11. 4)
12. Mnożenie liczb dziesiętnych	6	„Ile papieru na oklejenie pudełka?": pole prostokąta o niecałkowitych długościach boków. „Skalowanie” (długości, ceny, masy) liczbą dziesiętną. Techniki mnożenia liczby dziesiętnej z jedną cyfrą po przecinku przez liczbę całkowitą: różne sposoby, także przez sprowadzenie do całkowitych „skalowaniem” (np. $2,3 \cdot 1,5 = (23 \cdot 15) : (10 \cdot 10)$ ).	L, Alg	5. 2) 8) 11. 2)

**Linie tematyczne: L Liczby i działania, A Myślenie algebraiczne, F Figury geometryczne, M Mierzenie i miary, J Język matematyki, Alg Algorytmy**

13. Równania III	10	Zadania, w których dany jest bok i obwód lub pole prostokąta, a należy znaleźć drugi bok. Różne sposoby zależnie od danych. Równanie. Obliczenia w pamięci (różne sposoby) lub kalkulatorem.	A, Alg	6. 2) 3)
14. Zadania tekstowe I	15	Analiza i rozwiązywanie zadań tekstowych o różnorodnych kontekstach. Różne metody.	A, J	14.
15. Liczby naturalne II	12	Rozkładanie na składniki i czynniki. Liczby pierwsze, rozkład na czynniki pierwsze. Podzielność, cechy.	L, Alg	2. 4) 6) 7) 8) 9)
16. Stosunek, skala, ułamek zwykły	18	Korzystanie ze skali planu, mapy, modelu. Rysowanie w skali.  Równoznaczne zapisy $m/n$ i $m:n$ w różnych kontekstach. Część i całość. $m/n$ jako $1/n \cdot m$ , czyli $m$ „skalowane” przez $1/n$ . Ułamek zwykły i dziesiętny, właściwy i niewłaściwy. Znajdowanie punktu $m/n$ na osi liczbowej.	F, L, J, Alg	12. 8) 4. 1) 2) 3)

			Rozpoznawanie ułamków (stosunków) równoważnych. Skracanie i rozszerzanie ułamka.		
17.	Długość, pole, masa	10	Stosunki jednostek długości i pola. Masa i ciężar, jednostki masy i ich stosunki. Zamiana jednostek w zadaniach.	J, Alg	12. 7)
18.	Zadania tekstowe II	15	Analiza i rozwiązywanie zadań tekstowych o różnorodnych kontekstach, w tym droga-czas-prędkość. Różne metody.	A, J	14., 12. 9)
<b>KLASA VI</b>					
19.	Konstrukcje geometryczne	12	Posługiwanie się linijką, ekierką i cyrklem (proste równoległe i prostopadłe, okrąg, przenoszenie odcinka).  Posługiwanie się kątomierzem.  Konstruowanie trójkątów. Warunek ich istnienia.		7. 1) 3) 8. 2) 3) 9. 2)
20.	Liczby ujemne	15	Sytuacje, kiedy modelem jest para liczb („z... do...” na osi liczbowej, czarne i czerwone żetony, zmiany temperatury, zmiany poziomu wody w rzece). Pary równoważne. Porównanie różnicowe, znak minus i wartość bezwzględna. Liczba ujemna na osi liczbowej.  Porównywanie, dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych w kontekstach, algorytmizowanie tych operacji.	J, L, Alg	3.
21.	Własności trójkątów i czworokątów	12	Trójkąty na kracie, suma kątów, kąty trójkąta równoramiennego. Trójkąt równoboczny: własności i wnioski. Równoległobok, prostokąt, kwadrat, romb, trapez na kracie: kąty, suma kątów, kąty między przekątnymi. Bezpośrednie wnioski.	F, J	9. 3) 4) 5)

**Linie tematyczne: L** Liczby i działania, **A** Myślenie algebraiczne, **F** Figury geometryczne, **M** Mierzenie i miary, **J** Język matematyki, **Alg** Algorytmy

22.	Działania na ułamkach zwykłych I	15	Użycie standardowego modelu ułamka – prostokąta stałej szerokości. Porównywanie ułamków, różne sposoby.	L, Alg	5. 1) 5)
-----	----------------------------------	----	---	--------	----------

„Skalowanie” (długości, ceny, masy)  
ułamkiem zwykłym, zamiana jednostek.

Techniki mnożenia ułamków wzorowane  
na mnożeniu ułamków dziesiętnych, m.in.  
przez „skalowanie” czynników (np.  
 $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = (2 \cdot 1) : (3 \cdot 5) = 2 \cdot 1 / 3 \cdot 5$ . Dzielenie  
ułamków przez sprowadzanie do  
wspólnego mianownika, tj. wspólnego  
czynnika „skalującego”, np.  
 $\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = (2 \cdot 5 / 3 \cdot 5) : (1 \cdot 3 / 3 \cdot 5) = 2 \cdot 5 : 1 \cdot 3$ ).  
Algorytmizowanie tych działań.

23. Elementy statystyki	12	Gromadzenie danych, ich porządkowanie, przedstawianie w tabeli i na wykresie. Odczytywanie i interpretowanie danych publikowanych. Interpretowanie i tworzenie wypowiedzi z użyciem słowa „procent” jako synonimu „setnych”.	L, J	13.
24. Objętość	15	Pojemność naczyń, jednostki: l, ml. Objętość prostopadłościanu (model), wzór, jednostki. Sprawdzanie objętości deklarowanej na opakowaniach.	F, M, A, J	11. 4) 5)
25. Działania na ułamkach zwykłych II	15	„ $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$ to liczby. Jak je sensownie dodać?”: pomysły uczniów konfrontowane z modelem. Pomysł: rozszerzyć lub skrócić do wspólnego mianownika, tj. wspólnego czynnika „skalującego”. Algorytmizowanie operacji.	L, J, Alg	5. 1)
26. Działania na liczbach różnej postaci	15	Zapisywanie tej samej liczby w postaci ułamka zwykłego, dziesiętnego, liczby mieszanej, procentu. Przekształcanie z jednej formy na inne. Rachunki, w których występują liczby w różnej postaci.	L, J, Alg	5. 3)
27. Zadanie tekstowe III	15	Analiza i rozwiązywanie zadań tekstowych o różnorodnych kontekstach, w tym zadań ze sprawdzianów kompetencji.	A, J	14.
RAZEM	385			

## Realizacja treści podstawy programowej

Poniższa tabela wskazuje jednostki dydaktyczne programu *Matematyka realistyczna*, w których kształtowana jest wiedza lub umiejętność z podstawy programowej, wymieniona w pierwszej kolumnie.

Uczeń:	Jednostki dydaktyczne
1. 1) odczytuje i zapisuje liczby naturalne wielocyfrowe;	1.
2) interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej;	1.
3) porównuje liczby naturalne;	1.
4) zaokrągla liczby naturalne;	1.
5) liczby w zakresie do 30 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiętkowym, a zapisane w systemie dziesiętkowym przedstawia w systemie rzymskim;	1.
2. 1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe oraz liczby wielocyfrowe w przypadkach takich jak np. $230 + 80$ lub $4600 - 1200$ ; liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej;	3.
2) dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe pisemnie, a także za pomocą kalkulatora;	3.
3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową pisemnie, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);	10.
4) wykonuje dzielenie z resztą na liczbach naturalnych;	15.
5) stosuje wygodne dla niego sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia;	11.
6) porównuje różnicowo i ilorazowo liczby naturalne;	15.
7) rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez: 2, 3, 5, 9, 10, 100;	15.
8) rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także gdy na istnienie dzielnika wskazuje	15.

poznana cecha podzielności;	
9) rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;	15.
10) oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych;	10. 24.
11) stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;	11. 12. 26.
12) szacuje wyniki działań;	3. 4. 11. 12. 14. 26. 27.
<b>3.</b> 1) podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;	20.
2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej;	20.
3) oblicza wartość bezwzględną;	20.
4) porównuje liczby całkowite;	20.
5) wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych;	20.
<b>4.</b> 1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka;	16.
2) przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek;	16.
3) skraca i rozszerza ułamki zwykłe;	16.
4) sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;	22. 25. 26.
5) przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej i odwrotnie;	26.
6) zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;	17.
7) zaznacza ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje zaznaczone na niej ułamki zwykłe i dziesiętne;	4.
8) zapisuje ułamek dziesiętny skończony w postaci ułamka zwykłego;	26.
9) zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie ułamków zwykłych lub dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora);	26.
10) zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w pkt. 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem trzech kropek po ostatniej cyfrze), dzieląc licznik przez mianownik w pamięci, pisemnie	26.

lub za pomocą kalkulatora;

- 11) zaokrągla ułamki dziesiętne; 4.
- 12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne);
- 5.** 1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane; 22. 25.
- 2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci (w najprostszych przykładach), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach); 4. 12
- 3) wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne; 26.
- 4) porównuje różnicowo ułamki;
- 5) oblicza ułamek danej liczby naturalnej; 22.
- 6) oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych; 12. 24.
- 7) oblicza wartości prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań; 26.
- 8) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych poprawnych strategii lub z pomocą kalkulatora; 12.
- 9) szacuje wyniki działań; 22. 25. 26.
- 6.** 1) korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, zamienia wzór na formę słowną; 11.
- 2) stosuje oznaczenia literowe nieznanymi wielkościami liczbowymi i zapisuje proste wyrażenie algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym; 6. 13.
- 3) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (poprzez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego); 13.
- 7.** 1) rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek; 19.
- 2) rozpoznaje odcinki i proste prostopadłe i równoległe; 7.
- 3) rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych; 19.
- 4) mierzy długość odcinka z dokładnością do 1 milimetra; 4.

- 5) wie, że aby znaleźć odległość punktu od prostej, należy znaleźć długość odpowiedniego odcinka prostopadłego; 19.
- 8.** 1) wskazuje w kątach ramiona i wierzchołek; 2.
- 2) mierzy kąty mniejsze niż 180 stopni z dokładnością do 1 stopnia; 19.
- 3) rysuje kąt o mierze mniejszej niż 180 stopni; 19.
- 4) rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty; 5.
- 5) porównuje kąty; 2.
- 6) rozpoznaje kąty wierzchołkowe i kąty przyległe oraz korzysta z ich własności; 21.
- 9.** 1) rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, równoboczne i równoramienne; 5.
- 2) konstruuje trójkąt o trzech danych bokach; ustala możliwość zbudowania trójkąta (na podstawie nierówności trójkąta); 19.
- 3) stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta; 21.
- 4) rozpoznaje i nazywa kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez; 2. 21.
- 5) zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu; 21.
- 6) wskazuje na rysunku, a także rysuje cięciwę, średnicę, promień koła i okręgu; 2.
- 10.** 1) rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył; 9.
- 2) wskazuje wśród graniastosłupów prostopadłościany i sześciiany oraz uzasadnia swój wybór; 9.
- 3) rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów; 9.
- 4) rysuje siatki prostopadłościanów; 9.
- 11.** 1) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków; 5.
- 2) oblicza pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta i trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych; 10.

- 3) stosuje jednostki pola:  $m^2$ ,  $cm^2$ ,  $km^2$ ,  $mm^2$ ,  $dm^2$ , ar, hektar 17.  
(bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń);
- 4) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu 11. 24.  
przy danych długościach krawędzi;
- 5) stosuje jednostki objętości i pojemności: litr, mililitr,  $dm^3$ ,  $m^3$ , 24.  
 $cm^3$ ,  $mm^3$ ;
- 6) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności 21.  
kątów i wielokątów;
- 12.** 1) interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako 4.  
połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą,  
a 1% – jako setną część danej wielkości liczbowej;
- 2) w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza 4.  
procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 10%,  
20%;
- 3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach 1. 3.  
i sekundach;
- 4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, 1. 3.  
tygodniach, miesiącach i latach;
- 5) odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną); 20.
- 6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: metr, 1.  
centymetr, decymetr, mili metr, kilometr;
- 7) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki masy: gram, 17.  
kilogram, dekagram, tona;
- 8) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego 16.  
długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego  
rzeczywista długość;
- 9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości 18.  
i danym czasie, prędkość przy danej drodze i danym czasie, czas  
przy danej drodze i danej prędkości; stosuje jednostki prędkości:  
 $km/h$ ,  $m/s$ ;
- 13.** 1) gromadzi i porządkuje dane; 23.
- 2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, 23.  
tabelach, diagramach i na wykresach;
- 14.** 1) czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje 6. 8. 14.  
liczbowe;



- 2) wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla siebie zapisanie informacji i danych z treści zadania; 14.
- 3) dostrzega zależności między podanymi informacjami; 6. 8. 14.
- 4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne poprawne strategie rozwiązania; 14.
- 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody; 14.
- 6) weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania. 14.

## Ocenianie kompetencji uczniów

Ocena kompetencji uczniów może być dokonywana na użytek dalszych etapów edukacyjnych lub podmiotów zatrudniających, lub też w celu dydaktycznym, jako informacja dla samego ucznia i dla nauczyciela, służąca ukierunkowaniu dalszego procesu kształcenia – ocena formatywna.

1. Najskuteczniejszym rodzajem oceny formatywnej wydaje się samoocena ucznia. Jak wykazał w szerokich badaniach<sup>5</sup> J. Hattie, czynnikiem najsilniej pozytywnie wpływającym na średnią ocenę klasy w standardowych testach było systematyczne posługiwanie się przez nauczyciela samooceną uczniów, tj. sytuacją, w której każdy uczeń sam ocenia swoje wiadomości, umiejętności, rozumienie itp. jakościowo lub ilościowo w jakiejś skali. Zachęcamy wprowadzenie samooceny do repertuaru środków pedagogicznych w klasach realizujących program *Matematyka realistyczna*.

Samoocena może być organizowana w różny sposób. Jednym z nich jest rozdanie uczniom karteczek z poniższą tabelką.

### SAMOOCENA UCZNIĄ KL. IV – Dodawanie i odejmowanie

	Nie umiem	Często się mylę	Czasami się mylę	Umiem dobrze
Dodawanie pisemne				
Odejmowanie pisemne				
Dodawanie pamięciowe				
Odejmowanie pamięciowe				

W czasie wprowadzania samooceny nauczyciel będzie pomagał uczniom w jej dokonaniu, uświadamiając im celowość zrobienia tego w sposób racjonalny, nie przypadkowy.

Inna możliwość to wspólna poprawa sprawdzianu. Po zakończeniu sprawdzianu zadania są na tej samej lekcji wspólnie rozwiązywane na tablicy, a następnie każdy uczeń znajduje błędy w swojej pracy i sam je poprawia. Samoocena polega wówczas na wyszukiwaniu i zauważaniu błędów i braków przez ucznia, a nie przez nauczyciela. Na koniec każdy uczeń może wystawić sobie ocenę, słownie lub w punktach.

Jeszcze inna wypróbowana forma samooceny to pisanie listów. Każdy uczeń pisze list do fikcyjnego kolegi, w którym opisuje, czego nauczył się w wybranym okresie. Powinien w liście przyznać się, czego nie zrozumiał, i pochwalić się tym, co mu już nie sprawia

---

<sup>5</sup> John Hattie, *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*, Routledge, London 2008.

trudności. Listy mogą być, za zgodą autorów, wykorzystane przez nauczyciela w jego dalszej pracy.

Ocena, jaką sobie wystawia uczeń, może być uwzględniona w informowaniu rodziców o jego postępach, a także przy ustalaniu oficjalnej oceny okresowej. Takie działanie stwarza dydaktycznie cenną atmosferę wzajemnego zaufania między uczniem, nauczycielem i rodzicami.

2. Ocena przeprowadzana przez nauczyciela (zwana sprawdzianem) w formie zadań przekazywanych uczniowi ustnie lub na piśmie do rozwiązania i podania odpowiedzi na piśmie także powinna zawsze pełnić funkcję oceny formatywnej. Znaczy to, że treść i sformułowanie zadań powinny zapewniać uzyskanie możliwie najwięcej informacji o stanie tej wiedzy i tych umiejętności ucznia, które interesują nauczyciela. Program *Matematyka realistyczna* kładzie nacisk na samodzielne i elastyczne stosowanie przez uczniów poznawanych metod i technik matematycznych. Do oceny tak rozumianych osiągnięć nie mogą być użyte tak zwane zadania zamknięte (testy wyboru) ani zadania zbudowane według wyuczonego schematu, schematycznie rozwiązywane. Zaproponowane poniżej typy zadań w sprawdzianach zostały wypracowane przez Instytut Freudenthala w Utrechcie<sup>6</sup> i są stosowane w szkołach holenderskich oraz tam, gdzie funkcjonują programy oparte na teorii Realistycznego Nauczania Matematyki.

Typ I – zadania ujawniające świadomy i właściwy wybór metody.

Przykład:

	A kosztuje 14,50 zł	
	B kosztuje 8,25 zł	
	C kosztuje 1,75 zł	Jaka jest reszta z dzielenia 3604 przez 100?
$5 \cdot 4,99 \text{ zł} =$	D kosztuje 5,50 zł	
	Ile to razem?	
Twoja metoda:	Twoja metoda:	Twoja metoda:
Pisemnie <input type="checkbox"/>	Pisemnie <input type="checkbox"/>	Pisemnie <input type="checkbox"/>
W pamięci <input type="checkbox"/>	W pamięci <input type="checkbox"/>	W pamięci <input type="checkbox"/>
Kalkulatorem <input type="checkbox"/>	Kalkulatorem <input type="checkbox"/>	Kalkulatorem <input type="checkbox"/>
Rozwiązanie:	Rozwiązanie:	Rozwiązanie:

Typ II – zadania, do których może być kilka poprawnych odpowiedzi.

<sup>6</sup> Marja Van den Heuvel-Panhuizen, *Assessment and Realistic Mathematics Education*, CD-B Press/FreudenthalInstitute, Utrecht University, Utrecht 1996.

Przykład: Dane są ceny towarów, należy wybrać zakup w granicach danej kwoty.

Typ III – zadania do wyboru. Uczeń może wybrać zadanie, które będzie rozwiązywać, według swojej oceny stopnia trudności.

Typ IV – zadania własne ucznia.

Przykład: a) Dane są ceny kilku produktów, zadaniem ucznia jest utworzyć zadanie (zadać pytanie) i rozwiązać je. b) Utworzyć i rozwiązać dwa zadania na odejmowanie, jedno łatwe i jedno trudne.

Typ V – serie zadań formalnie równoważnych, różniących się kontekstem, językiem lub innymi cechami, których wpływ na myślenie ucznia interesuje nauczyciela.

Przykład: a) A i B mają razem 21 orzechów, B ma 3 razy więcej niż A; ile ma A, ile B? b) A ma  $\frac{1}{3}$  liczby orzechów, jakie ma B; ile ma A, ile B, jeżeli razem mają 21 orzechów? c)  $x$  jest 3 razy większe od  $y$ , a  $x+y=21$ ; znajdź  $x$  i  $y$ .

Typ VI – zadania bliźniacze. Są to pary zadań takich, że rozwiązanie jednego może być użyte do ułatwienia rozwiązania drugiego.

Przykład: a) A kosztuje 1,5 Euro. Oblicz, ile to złotych, gdy 1 Euro = 4,35 zł. b) B kosztuje 4,5 Euro. Oblicz, ile to złotych, gdy 1 Euro = 4,35 zł.

Typ VII – zadania „z podpórką”.

Przykład:

Oblicz w pamięci:

$$86 + 57 = 143$$

$$86 + 56 =$$

$$860 + 570 =$$

$$143 - 86 =$$

$$85 + 57 =$$

$$57 + 86 =$$

$$86 + 86 + 57 + 57 =$$

$$85 + 58 =$$

(Wykonanie zadania informuje, w jakim stopniu uczeń korzysta z ułatwień, jakie wynikają z praw działań.)

W celu skutecznego pisemnego sprawdzania osiągnięć w klasach realizujących program *Matematyka realistyczna* potrzebne będzie stworzenie banku odpowiednich zadań wraz z kryteriami oceny odpowiedzi uczniów, adekwatnymi do informacji o wiedzy ucznia, jaką ma wykorzystywać zadanie.

3. Konieczne przygotowanie do sprawdzianu kompetencji po klasie VI będzie wymagało rozwiązywania przez uczniów zadań ze sprawdzianów archiwalnych i przeprowadzenia sprawdzianów próbnych, ocenianych według oficjalnych kryteriów.